1.5. Değişken Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklemler

$a_0(x) \neq 0$ olmak üzere

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

formundaki denklemlere n. mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem dendiğini ilk bölümlerde ifade etmiştik. Yine bu denklemin $p_i(x)$ katsayılarına bağlı olarak operatör formda

$$L(D) = L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x)$$

olmak üzere

$$L(D)y = Ly) = B(x)$$

olarak yazılabileceğini de belirtmiştik.

Değişken katsayılı denklemlerin çözümü için genel yöntemler yoktur. Ancak bazı özel hallere uygulanabilecek özel yöntemler vardır. Bunlardan bazıları;

1) Mertebe düşürme yöntemi

2) Parametrelerin değişimi yöntemi

3) Sabit katsayılı hale indirgeme yöntemleri

şeklindedir

1.5.1. Mertebe Düşürme Yöntemi

Bu yöntem hem sabit hem de değişken katsayılı denklemlere uygulanabilir. Çözüm için $Ly=0$ homojen kısmın bir (özel) çözümünün bilinmesi gerekir.

Teorem 17: $p_i(x)$, $B(x)$ bir I açık aralığında sürekli olsun. Eğer $Ly=0$ homojen lineer denkleminin lineer bağımsız k özel çözümü bilinirse, $Ly=B(x)$ denkleminin mertebesi k kadar düşürülebilir.

Bu yöntem üçüncü ve daha yüksek mertebeden denklemler için pek kullanışlı değildir. Fakat ikinci mertebeden denkleme bu yöntem uygulandığında denklem birinci mertebeye düşeceği için bilinen yöntemler ile çözüm kolayca bulunabilir.

Not 1) $Ly=0$ da y nin katsayısı sıfır ise ($P_n(x)=0$ ise) $y=1$ denklemin bir çözümüdür.

2) $Ly=0$ da y nin en düşük türevi α. mertebeden ise $y=x^{\alpha-1}$, $\alpha>0$ fonksiyonu denklemin bir çözümüdür.

3) $Ly=0$ da y nin ve türevlerinin katsayıları toplamı sıfır ise $y=e^x$ fonksiyonu bir çözümdür.

4) $Ly=0$ da y nin tek mertebeden türevlerinin katsayıları toplamı ile y nin çift mertebeden türevlerinin katsayıları toplamı farkı sıfır ise $y=e^{-x}$ fonksiyonu bir çözümdür.

5) Bir r sabiti için $r^n+P_1(x)r^{n-1}+\dots+P_{n-1}(x)r+P_n(x)=0$ ise $y=e^{rx}$ fonksiyonu bir çözümdür.

6) $Ly=0$ denklemi y bağımlı değişkenini veya y ile beraber küçük mertebeli bazı ardışık türevlerini içermezse yani denklem

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_k(x)y^{(k)} = b(x)$$

şeklinde ise $y = x^{k-1}$ homojen kısmın çözümüdür ve $y^{(k)} = u$ dönüşümü ile u bağımlı değişkenli $(n-k)$ mertebeli denkleme indirgenip çözülebilir.

Özel olarak $k=n$ ise yani $y^{(n)} = \dfrac{b(x)}{a_n(x)}$ ise genel çözüm n defa ardışık integral alınarak bulunur.

Örnek: $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 2e^x$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$x + 2(1-x) + x - 2 = 0$ olduğundan Not 1'e göre $y = e^x$,

$xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 0$ denkleminin bir çözümüdür.

Bu çözüm yardımıyla denklemin mertebesi düşürülebilir.

$y = e^x . u \quad , \quad u = u(x)$

değişken değişimi yapalım.

$y' = e^x u + e^x u' \quad , \quad y'' = e^x u + 2e^x u' + e^x u''$ için

$x(e^x u + 2e^x u' + e^x u'') + 2(1-x)\{e^x u + e^x u'\} + (x-2)\{e^x u\} = 2e^x$

$\Rightarrow \cancel{e^x}\{xu'' + (2x + 2 - 2x)u' + (x + \cancel{2} - 2x + x - \cancel{2})u\} = 2\cancel{e^x}$

$\Rightarrow xu'' + 2u' = 2$ denklemi elde edilir.

$u' = v$ dersek $u'' = v'$ olup

$xv' + 2v = 2 \Rightarrow v' + \frac{2}{x}v = \frac{2}{x}$ şeklinde birinci

mertebeden lineer diferansiyel denklem elde edilir. Bunun genel

Çözümü $\lambda(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln x} = x^2$ olmak üzere

$$v \cdot x^2 = \int \frac{2}{x} \cdot x^2 dx + c_1 \Rightarrow v x^2 = x^2 + c_1 \Rightarrow v = 1 + \frac{c_1}{x^2} \text{ olur.}$$

$u' = v$ olduğundan $u' = 1 + \frac{c_1}{x^2} \Rightarrow u = \int \left(1 + \frac{c_1}{x^2}\right) dx$

$\Rightarrow u = x - \frac{c_1}{x} + c_2$ bulunur.

$y = e^x u$ olduğundan denklemin genel çözümü

$$y = e^x\left(x - \frac{c_1}{x} + c_2\right)$$

$y = -\frac{e^x}{x} c_1 + e^x c_2 + x e^x$ şeklinde bulunur.

Örnek: $\sin^2 x \cdot y'' = 1$ denkleminin çözümünü bulunuz

Denklemde y ve y' olmadığından

$y'' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ yazılırsa iki kez integral alınarak

$$y' = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx + c_1 \Rightarrow y' = -\cot x + c_1$$

$$\Rightarrow y = \int (-\cot x + c_1)\,dx + c_2$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{-\ln(\sin x)}_{y_ö} + \underbrace{c_1 x + c_2}_{y_h}$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

Örnek: $xy'' + (x-1)y' = e^{-x}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Denklemde y bulunmadığından

$y' = u$ dersek $y'' = u'$ olacağından denklem

$$xu' + (x-1)u = e^{-x} \Rightarrow u' + \frac{x-1}{x}u = \frac{e^{-x}}{x}$$

birinci mertebeden lineer denklemine indirgenir. Bunun çözümü

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{x-1}{x} dx} = e^{x - \ln x} = \frac{e^x}{x} \quad \text{olmak üzere}$$

$$u \cdot \frac{e^x}{x} = \int \frac{e^{-x}}{x} \cdot \frac{e^x}{x} dx + c_1 \Rightarrow \frac{e^x}{x} u = -\frac{1}{x} + c_1$$

$$\Rightarrow u = -e^{-x} + x e^{-x} c_1 \quad \text{olur.}$$

$$y' = u \Rightarrow y' = -e^{-x} + x e^{-x} c_1$$

$$\Rightarrow y = \int (-e^{-x} + x e^{-x} c_1) dx + c_2$$

$$\Rightarrow y = e^{-x} - c_1 (x+1) e^{-x} + c_2$$

istenen genel çözümdür.

Örnek! $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ denkleminin bir çözümü $y_1 = x$ ise genel çözümünü bulunuz.

Denklemde y var olduğundan mertebe düşürebilmek için homojen kısmın bir özel çözümüne ihtiyaç vardır.

$y_1 = x$ için

$y = x.u$ dönüşümü ile $y' = u + xu'$, $y'' = 2u' + xu''$ için

$$(x^2+1)(2u' + xu'') - 2x(u + xu') + 2ux = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2+1)u'' + 2u' = 0$$

elde edilir. Burada denklemde u olmadığı için

$u' = v$ denirse $u'' = v'$ olacağından denklem

$$x(x^2+1)v' + 2v = 0 \Rightarrow x(x^2+1)\frac{dv}{dx} = -2v$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{2}{x(x^2+1)}dx$$

değişkenlerine ayrılabilen denkleme indirgenir. Buradan

$$\frac{dv}{v} = \left(-\frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$$\Rightarrow \ln v = -2\ln x + \ln(x^2+1) + \ln c_1 \Rightarrow v = x^{-2}(x^2+1)c_1 \text{ dır.}$$

$$u' = v \Rightarrow u' = x^{-2}(x^2+1)c_1 \Rightarrow u = \int \frac{x^2+1}{x^2} c_1 \, dx + c_2$$

$$\Rightarrow u = c_1\left(x - \frac{1}{x}\right) + c_2$$

bulunur

$$y = xu \Rightarrow y = x\left(c_1\left(x - \frac{1}{x}\right) + c_2\right)$$

$$\Rightarrow y = c_1(x^2-1) + c_2 x$$

genel çözümü elde edilir.

1.5.2. Parametrelerin (Sabitlerin) Değişimi Yöntemi

Sabit katsayılı denklemlerde uygulandığı gibi $Ly=0$ homojen denkleminin $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ çözümü bilindiğinde buradaki c_i sabitlerini değişken olarak kabul ederek sabitin değişimi yöntemi ile $Ly = B(x)$ homojen olmayan denklemin genel çözümü bulunur.

Örnek: $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$ denkleminin homojen kısmına ait lineer bağımsız çözümler $y_1 = x$ ve $y_2 = e^x$ olduğuna göre genel çözümü bulunuz.

Denklem $Ly = B(x)$ formunda düzenlenirse

$$y'' - \frac{x}{x-1} y' + \frac{1}{x-1} y = x-1$$ olur.

Homojen kısmın genel çözümü $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ den
$y_h = c_1 x + c_2 e^x$ şeklindedir. Buradaki sabitleri değişken olarak kabul edersek özel çözüm $y_ö = c_1(x)x + c_2(x)e^x$ şeklinde (veya $y_ö = v_1(x)x + v_2(x)e^x$ formunda) sabitin değişimi ile aranırsa

$$\left.\begin{array}{l} c_1' x + c_2' e^x = 0 \\ c_1' 1 + c_2' e^x = x-1 \end{array}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Bunun çözümünden

$$c_1' = -1 \Rightarrow c_1(x) = \int -1\,dx \Rightarrow c_1(x) = -x \quad \text{olur.}$$

$$c_2' = xe^{-x} \Rightarrow c_2(x) = \int xe^{-x}dx \Rightarrow c_2(x) = -e^{-x}(x+1) \quad \text{olur}$$

O halde homojen olmayan kısmın özel çözümü

$$y_ö = c_1(x)\cdot x + c_2(x)\cdot e^x = -x\cdot x - e^{-x}(x+1)e^x$$

$$\Rightarrow y_ö = -x^2 - x - 1 \quad \text{olur.}$$

Verilen denklemin genel çözümü $y = y_h + y_ö$ den

$$y = c_1 x + c_2 e^x - x^2 - x - 1$$

olarak bulunur.

(*) Eğer $c_i(x)$ ler belirlenirken alınan integrable integral sabitleri de eklenirse yani

$$c_1' = -1 \Rightarrow c_1(x) = -x + C_1$$

$$c_2' = x e^{-x} \Rightarrow c_2(x) = -e^{-x}(x+1) + C_2$$

olarak alınırsa verilen denklemin genel çözümü

$$\begin{aligned} y &= x . c_1(x) + e^x c_2(x) \\ &= x(-x + C_1) + e^x\left(-e^{-x}(x+1) + C_2\right) \\ &= C_1 x + C_2 e^x - x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

şeklinde de bulunabilir.

1.6.3 Sabit Katsayılı Hale Dönüştürülebilen Denklemler

Tanım 3 Her bir terimi $x^k y^{(k)}$ ifadesinin bir sabitle çarpımı şeklinde

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = b(x) \quad \text{--- (19)}$$

tipindeki n. mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemlere Cauchy-Euler denklemi denir. Burada $a_0, a_1, \dots, a_n$ sabitlerdir. Bu denklemler bir bağımsız değişken değişimi ile sabit katsayılı hale indirgenerek çözülür.

Teorem 18: (19) ile verilen Cauchy-Euler denklemi, $x>0$, $x=e^t$ (veya $t=\ln x$) değişken değişimi ile sabit katsayılı bir lineer denkleme dönüşür.

İspat 3 $x=e^t \Rightarrow t=\ln x$ dönüşümü ile x e göre olan türevleri t ye göre türevler cinsinden ifade edelim:

Türev değişkenini karıştırmamak için

$$D_x = \frac{d}{dx}, \qquad D_t = \frac{d}{dt}$$

gösterimlerini kullanalım. Buna göre $t = \ln x$, $x > 0$ için

- $y' = D_x y = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = D_t y \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow x y' = x D_x y = D_t y$

- $y'' = D_x^2 y = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}\right)$

$$= \frac{d^2y}{dt^2} \underbrace{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2}_{\left(\frac{1}{x}\right)^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \underbrace{\frac{d^2t}{dx^2}}_{-\frac{1}{x^2}} = D_t^2 y \cdot \frac{1}{x^2} - D_t y \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} D_t (D_t - 1) y$$

$$\Rightarrow x^2 y'' = x^2 D_x^2 y = D_t (D_t - 1) y \quad \text{olur.}$$

$$\bullet\ y''' = D_x^3 y = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(D_t^3 y - 3D_t^2 y + 2D_t y\right)$$

$$\Rightarrow x^3 y''' = x^3 D_x^3 y = \left(D_t^3 - 3D_t^2 + 2D_t\right) y = (D_t - 2)(D_t - 1) D_t y$$

dur. Genel olarak

$$y^{(n)} = D_x^n y = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\left(D_t - (n-1)\right)\left(D_t - (n-2)\right) \cdots (D_t - 1) D_t y$$

olmak üzere

$$x^n y^{(n)} = x^n D_x^n y = (D_t - n + 1)(D_t - n + 2) \cdots (D_t - 2)(D_t - 1) D_t y$$

dur. Bu ifadeler (19) da yerine yazılırsa

$$\left(a_0 D_t (D_t - 1) \cdots (D_t - n + 1) + a_1 D_t (D_t - 1) \cdots (D_t - n) + \cdots + a_{n-1} D_t + a_n\right) y = b(\ln t)$$

sabit katsayılı lineer denklemi elde edilir.

Not: $(-\infty, 0)$ aralığındaki çözümü bulmak için $-x = e^t$ dönüşümü yapılır.

Örnek: $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Denklem Cauchy-Euler denklemidir.

$x = e^t$, $x > 0$ için $t = \ln x$

$xy' = D_t y$, $x^2 y'' = D_t(D_t - 1)y$ olacağından verilen denklem

$$(D_t(D_t-1) - 2D_t + 2)\,y = (e^t)^3$$

$$\Rightarrow (D_t^2 - D_t - 2D_t + 2)\,y = e^{3t}$$

$$\Rightarrow (D_t^2 - 3D_t + 2)\,y = e^{3t} \quad \{ y'' - 3y' + 2y = e^{3t},\ y = y(t) \}$$

şeklinde sabit katsayılı denkleme indirgenir. Bunun çözümü için

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$$ den

$$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$ homojenin çözümüdür. Özel çözüm

$$y_ö = \frac{1}{D_t^2 - 3D_t + 2} e^{3t} = \frac{1}{3^2 - 3.3 + 2} e^{3t} = \frac{1}{2} e^{3t}$$ bulunur.

Genel çözüm $y = y_h + y_ö = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t}$ olup $t = \ln x$ için

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2} x^3$$ olarak bulunur.

Örnek: $x^2y''' + 5xy'' + 3y' = x\ln x$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Denklem bu hali ile Cauchy-Euler denklemi değildir. Denklemin her iki yanı x ile çarpılırsa

$$x^3y''' + 5x^2y'' + 3xy' = x^2\ln x$$ olup Cauchy-Euler denklemi elde edilir.

$x = e^t$, $x > 0$ dönüşümü ile

$$xy' = D_t y$$
$$x^2y'' = D_t(D_t - 1)y$$
$$x^3y''' = D_t(D_t-1)(D_t-2)y$$

olup bunlar denklemde yerine yazılırsa

$$\left(D_t(D_t-1)(D_t-2) + 5D_t(D_t-1) + 3D_t\right)y = e^{2t}\cdot t$$
$$\left(D_t^3 + 2D_t^2\right)y = te^{2t}$$

sabit katsayılı denkleme indirgenir. Bu denklemin çözümü:

$$\ell(\lambda)=\lambda^3+2\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=-2$$

için $y_h = c_1+c_2t+c_3e^{-2t}$ olur.

$$y_ö = \frac{1}{D_t^3+2D_t^2}\, te^{2t} = e^{2t}\frac{1}{(D_t+2)^3+2(D_t+2)^2}\, t$$

$$= e^{2t}\frac{1}{D_t^3+8D_t^2+20D_t+16}\, t = \frac{e^{2t}}{16}\left\{1-\frac{\cancel{D_t^3}+\cancel{8D_t^2}+20D_t}{16}+\dots\right\}t$$

$$16\left\{1+\frac{D_t^3+8D_t^2+20D_t}{16}\right\}$$

$$= \frac{e^{2t}}{16}\left\{t-\frac{20}{16}\right\} = \frac{e^{2t}}{16}\left\{t-\frac{5}{4}\right\}$$

olarak bulunur. Buna göre genel çözüm

$$y=y_h+y_ö = c_1+c_2t+c_3e^{-2t}+\frac{e^{2t}}{16}\left\{t-\frac{5}{4}\right\}$$

$x=e^t$, $t=\ln x$ için $\quad y=c_1+c_2\ln x+c_3x^{-2}+\dfrac{x^2}{16}\left\{\ln x-\dfrac{5}{4}\right\}$

şeklindedir.

Tanım: Her bir terimi $(bx+c)^k y^{(k)}$ ifadesinin bir sabitle çarpımı olan

$$a_0 (bx+c)^n y^{(n)} + a_1 (bx+c)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} (bx+c) y' + a_n y = b(x) \quad (20)$$

tipindeki n. mertebeden denklemlere **Legendre denklemi** denir. Bu denklem $bx+c=u$ dönüşümü ile Cauchy-Euler denklemine dönüşür.

Teorem 19: (20) Legendre denklemi $bx+c=e^t$ dönüşümü ile y bağımlı ve t bağımsız değişkenli sabit katsayılı bir denkleme indirgenerek çözülür.

İspat: $bx+c=e^t \Rightarrow t=\ln(bx+c)$

- $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = D_t y \cdot \frac{b}{bx+c} \Rightarrow (bx+c)y' = b D_t y$

- $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b^2}{(bx+c)^2}(D_t^2 - D_t)y \Rightarrow (bx+c)^2 y'' = b^2 D_t (D_t - 1) y$

$\vdots$

- $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{b^n}{(bx+c)^n} (D_t - n + 1)(D_t - n + 2) \dots (D_t - 1) D_t y$

$\Rightarrow (bx+c)^n y^{(n)} = b^n D_t (D_t - 1) \dots (D_t - n + 1) y$ olup buradan

$$\left(a_0 b^n D_t(D_t-1)\cdots(D_t-n+1) + a_1 b^{n-1} D_t(D_t-1)\cdots(D_t-n+2) + \cdots + a_{n-2} b^2 D_t(D_t-1) + a_{n-1} b D_t + a_n\right) y = b(t)$$

sabit katsayılı denklem elde edilerek çözümü bulunabilir.

Örnek: $(x+2)^3 y''' + (x+2)^2 y'' + (x+2) y' = (x+2)$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Denklem Legendre denklemi olup $x+2=e^t$ dönüşümü yapılırsa

$$(x+2)y' = D_t y$$

$$(x+2)^2 y'' = D_t(D_t-1)y$$

$$(x+2)^3 y''' = D_t(D_t-1)(D_t-2)y$$

olup bunların denklemde yerlerine yazılmasıyla

$$\left(D_t(D_t-1)(D_t-2)+D_t(D_t-1)+D_t\right)y=e^t$$

$$\Rightarrow \left(D_t^3-2D_t^2+2D_t\right)y=e^t$$

sabit katsayılı denklem elde edilir.

$$\ell(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2-2\lambda+2)=0 \quad \lambda_1=0$$

$$\lambda_2=1+i,\ \lambda_3=1-i$$

için $y_h=c_1+e^t\{c_2\cos t+c_3\sin t\}$ olur.

$$y_ö=\frac{1}{D_t^3-2D_t^2+2D_t}e^t=\frac{1}{1^3-2.1^2+2.1}e^t=e^t \quad \text{olur.}$$

Genel çözüm

$$y=y_h+y_ö=c_1+e^t\{c_2\cos t+c_3\sin t\}+e^t$$

$$=c_1+(x+2)\{c_2\cos(\ln|x+2|)+c_3\sin(\ln|x+2|)\}+x+2$$

olarak bulunur.